

卫星通信的极化码短码译码技术改进



Improvement of Decoding Technologies for Short Polar Codes in Satellite Communication

李春杰/Li Chunjie, 马啸/Ma Xiao

(中山大学广东省信息安全技术重点实验室, 中国 广州 510006)
(Guangdong Provincial Key Laboratory of Information Security Technology, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510006, China)

DOI:10.12142/ZTETJ.202601012

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/34.1228.tn.20260225.1016.008>

网络出版日期: 2026-02-25

收稿日期: 2025-12-16

摘要: 信道编码是保证通信可靠性的物理层关键技术, 其中极化码是当前和未来一种重要的候选编码方案。首先对极化码基本原理和编译码技术进行概述, 主要包括信道极化、极化码构造与编码、速率兼容方案和译码算法。然后, 针对短极化码提出了一种串行消除列表 (SCL) 和阶序统计译码 (OSD) 级联的译码方案。与 SCL 相比, 该方案在译码性能相当的情况下具有更低的复杂度。

关键词: 极化码; 信道极化; 极化码构造; 串行消除列表译码; 阶序统计译码

Abstract: Channel coding is a key physical layer technology to ensure the reliability of communication, among which, the polar code is an important candidate coding scheme for the present and future. The primary principle of polar codes and their encoding and decoding techniques are reviewed, which mainly include channel polarization, polar code construction and coding, rate-compatible schemes, and decoding algorithms. Then, a cascaded decoding scheme of successive cancellation list (SCL) and ordered statistics decoding (OSD) is proposed for short polar codes. Compared with SCL, SCL-OSD can achieve similar decoding performance with lower complexity.

Keywords: polar code; channel polarization; polar code construction; successive cancellation list decoding; ordered statistic decoding

引用格式: 李春杰, 马啸. 卫星通信的极化码短码译码技术改进 [J]. 中兴通讯技术, 2026, 32(1): 79-86. DOI: 10.12142/ZTETJ.202601012

Citation: Li C J, Ma X. Improvement of decoding technologies for short polar codes in satellite communication [J]. ZTE technology journal, 2026, 32(1): 76-86. DOI: 10.12142/ZTETJ.202601012

自 2020 年以来, 5G 已在全球范围内实现商用, 显著提升了移动通信的传输速率、系统容量与时延性能。然而, 5G 主要针对地面网络, 无法满足全球覆盖的需求。第 3 代合作伙伴计划 (3GPP) 已启动 5G 非地面网络 (NTN) 的技术标准化工作^[1-2], 以进一步提升 5G 系统的覆盖范围。在 NTN 中, 卫星通信是核心, 是未来移动通信的关键技术。利用卫星通信覆盖范围广的特性, 移动通信系统的覆盖范围可扩展至偏远山区、远洋、空中乃至太空等地面网络难以到达的区域。

卫星通信的信号在自由空间传输, 容易受到气候、环境、距离等多种因素的影响。因此, 为了提升卫星通信的可靠性, 需要采用一些差错控制技术。信道编码可以提高信号传输的可靠性, 是移动通信的物理层关键技术。信道编码的历史可以追溯到 1948 年。香农证明^[3], 对于任何有噪声信道,

当码率不超过信道容量时, 使用信道编码技术可以实现无差错的数据传输。该理论定义了传输速率的极限, 即信道容量, 但没有给出接近该容量的码字传输的构造方法。基于香农的理论, 许多学者提出了各种编码方法, 其中比较优秀的码主要有卷积码、Turbo 码和低密度奇偶校验码 (LDPC) 等。在蜂窝通信中, 卷积码是 2G 控制信道和数据信道的编码方案, 同时也是 3G 和 4G 的控制信道编码方案, Turbo 码是 3G 和 4G 的数据信道编码方案, LDPC 已被采纳为 5G 中数据信道编码方案。然而, 这些信道编码方案都难以从理论上严格证明是渐进可达信道容量的。2009 年, Arıkan 教授提出了极化码方案^[4], 它是第一个可证明信道容量渐进可达的编码方案。自极化码提出以来, 关于其构造方法、编码方案和译码算法等已取得了许多成果。当前, 极化码已被采纳为 5G 控制信道的编码方案^[5]。NTN 作为 5G 以及未来移动通信的一部分, 研究卫星通信下的极化码编译码技术具有重要的意义。

基金项目: 国家重点研发计划项目 (2021YFA1000500)

1 极化码基本原理

极化码通过信道极化，将 N 个独立信道极化为 N 个信道容量不同的子信道。即对任意一组可靠度相同的二进制输入离散无记忆信道 (B-DMCs)，经过信道联合和信道分裂后，在信道容量上会极化为两种子信道 $W_N^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, N$ ，一部分子信道容量 $I(W_N^{(i)}) \rightarrow 1$ ，称为无噪信道，另一部分子信道容量 $I(W_N^{(i)}) \rightarrow 0$ ，称为完全噪声信道。在编码时，信息比特在无噪信道上传输，而完全噪声信道传输固定比特。

信道极化现象可总结为下述极化定理：

对任意 B-DMC W ，当 $N \rightarrow \infty$ 时，其中 $N = 2^n$, $n \geq 0$ ，对任意固定值 $\delta \in (0, 1)$ ，信道容量 $I(W_N^{(i)}) \in (1 - \delta, 1]$ 的子信道占比趋近 $I(W)$ ；信道容量 $I(W_N^{(i)}) \in [0, \delta]$ 的子信道占比趋近于 $1 - I(W)$ ，其中 $i = 1, 2, \dots, N$ 。

图 1 展示了 $N = 1, 2, 4$ 时信道极化的过程。若信道为二进制擦除信道 (BEC)，擦除概率为 ϵ ，则经过信道极化后，子信道信道容量可由公式 (1) 和公式 (2) 迭代计算：

$$I(W_N^{(2^{i-1})}) = I(W_{N/2}^{(i)})^2 \tag{1}$$

$$I(W_N^{(2^i)}) = 2I(W_{N/2}^{(i)}) - I(W_{N/2}^{(i)})^2 \tag{2}$$

其中， $I(W_1^{(1)}) = 1 - \epsilon$ 。图 2 展示了 BEC 在信道极化后，各子信道的信道容量分布，其中，码长 $N = 1\ 024\ 512\ 256$ ，擦除概率 $\epsilon = 0.5$ 。由图 2 可以看出，对不同长度的极化码，它们子信道的信道容量都具有两极分化的趋势，一部分子信道的信道容量趋于 1，另一部分子信道的信道容量趋于 0。另外，还有一部分子信道的容量在 0 和 1 之间，没有完全极化。这是因为极化码的码长不是无穷大，在有限码长下，会有部分信道不能完全极化。

2 极化码构造与编码

极化码的构造在于寻找可靠度高的子信道以传输信息比特。因此，计算子信道的可靠度是非常重要的。下面介绍几种重要的估计信道可靠度的方法。

2.1 极化码构造方法

巴氏参数构造法是 Arkan 教授提出的第一种构造方法。对任意 B-DMC W ，定义巴氏参数如下：

$$Z(W) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} \sqrt{W(y|0)W(y|1)} \tag{3}$$

在极化变换 $(W_{N/2}^{(i)}, W_{N/2}^{(i)}) \mapsto (W_N^{(2^{i-1})}, W_N^{(2^i)})$ 中，各子信道的

巴氏参数可以递归计算，具有下述关系：

$$Z(W_N^{(2^{i-1})}) + Z(W_N^{(2^i)}) \leq 2Z(W_{N/2}^{(i)}) \tag{4}$$

$$Z(W_N^{(2^i)}) = Z(W_{N/2}^{(i)})^2 \tag{5}$$

其中，只有在 BEC 中，公式 (4) 的等号才满足，因此巴氏参数可以准确地估计 BEC 信道的可靠度。对于其他 B-DMC，则只能得到错误概率的上界，并不能准确估计信道可靠性。

Mori 等将密度进化 (DE) 用于对极化码子信道可靠度的估计^[6]，该方法适用于对各种类型信道的可靠度估计。假设传输全 0 码字，令 $a_N^{(i)}$ 表示第 i 个子信道对应数似然比 (LLR) 的概率密度函数，则各信道的概率密度函数可由下式递归得到：

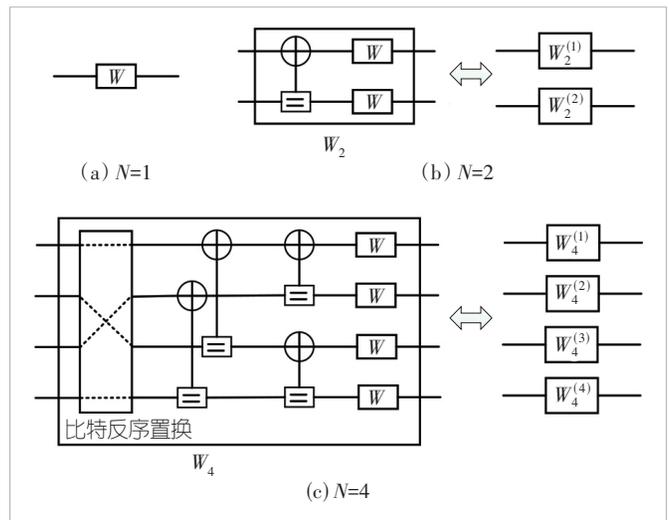


图1 N = 1, 2, 4 时信道极化过程

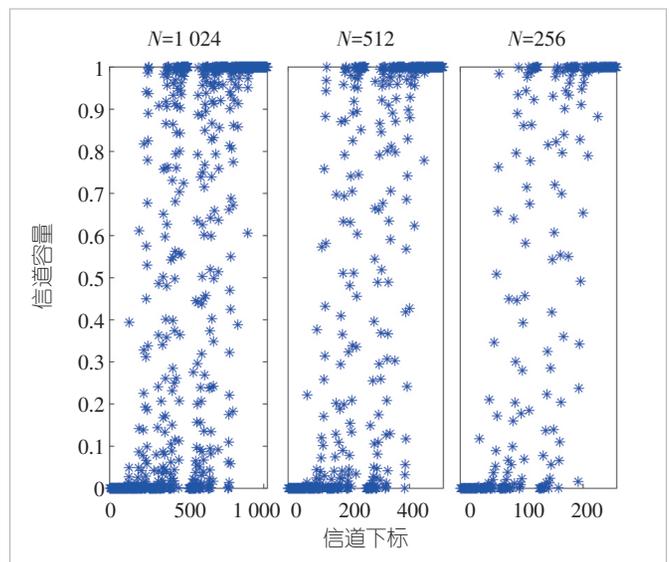


图2 子信道容量分布图($\epsilon = 0.5$)

$$\begin{aligned} a_N^{(2i-1)} &= a_{N/2}^{(i)} \otimes a_{N/2}^{(i)} \\ a_N^{(2i)} &= a_{N/2}^{(i)} * a_{N/2}^{(i)} \\ a_1^{(1)} &= a_\omega \end{aligned} \quad (6),$$

其中, \otimes 表示加号节点的卷积, $*$ 表示等号节点的卷积, a_ω 表示原始信道 W 的 LLR 概率密度函数。由公式 (6) 可以方便地计算出各子信道 LLR 的概率密度函数, 进而可以由公式 (7) 获得对应的错误概率:

$$P_e(W_N^{(i)}) = \int_{-\infty}^0 a_N^{(i)}(x) dx \quad (7).$$

密度进化包含大量卷积计算, 复杂度较高。针对加性白高斯噪声 (AWGN) 信道, 文献[7-8]提出了高斯近似 (GA) 方法。假设在信道中传输全 0 码字, 采用二进制相移键控 (BPSK) 调制方式, 即 $x_i = 1 - 2c_i$, 则每个接收值可表示为 $y_i = 1 + z_i$, 其中 $z_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, 则 $y_i \sim \mathcal{N}(1, \sigma^2)$ 。第 i 个 LLR 值 $L_i \sim \mathcal{N}(2/\sigma^2, 4/\sigma^2)$, 即 LLR 满足方差是均值两倍的高斯分布。GA 方法正是基于上述事实, 即在极化变换 $(W_{N/2}^{(i)}, W_{N/2}^{(i)}) \rightarrow (W_N^{(2i-1)}, W_N^{(2i)})$ 中, 3 种极化信道对应的 LLR 值具有方差是均值两倍的高斯分布, 因此只需要计算各节点处的均值即可。

上述信道估计方法均和信道参数密切相关, 在不同的信道条件下需要重新进行信道估计, 这无疑提高了计算复杂度。文献[9-10]提出了一种和信道条件无关的估计方法, 称为极化重量 (PW)。对任意极化信道下标 i ($i = 1, 2, \dots, N$), $i-1$ 的 n 位二进制展开 $\pi(i-1) = (b_n b_{n-1} \dots b_2 b_1)$, 从左到右对应最高位到最低位, 则第 i 个极化信道的极化重量 PW_i 可定义为:

$$PW_i = \sum_{j=1}^n b_j \beta^j \quad (8),$$

其中, β 可取值 $2^{1/4}$ 。计算出各子信道对应的极化重量后, 这些数值可以衡量子信道的可靠度, 即数值越大, 可靠度越高。

2.2 极化码编码

极化码编码方法主要分为非系统编码和系统编码。若极化码码长为 N , 信息位长度为 k , 根据 2.1 节所述极化码构造方法, 选出 k 个可靠度最高的子信道, 对应的下标构成信息位集合 \mathcal{A} , 用来放置信息比特, 剩余子信道下标构成冻结位集合 \mathcal{A}^c , 并放置固定比特 (一般放置全 0 比特)。

非系统编码过程可定义如下:

$$c_1^N = u_1^N G_N \quad (9),$$

其中, $G_N = B_N F^{\otimes n}$, B_N 是比特反序置换矩阵, $F = [10; 11]$

是极化码核矩阵, \otimes 表示 Kronecker 操作, $u_1^N = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ 和 $c_1^N = (c_1, c_2, \dots, c_N)$ 分别表示信息序列和码字。

Arkan 教授在文献[11]中指出, 系统极化码相比非系统极化码具有低误比特率的特点。系统极化码是指, 在传输的码字中信息比特和冗余比特是相互分离的, 可以直接提取信息比特。文献[11]给出了一种简单的系统编码方法, 即直接将信息比特放在码字中和集合 \mathcal{A} 一样的位置上, 码字中其他比特则可以根据极化码生成矩阵的特性推导出, 最后得到完整的码字。

3 极化码速率兼容方案

实际的信道状况是在不断变化的, 因此码长也需要具备灵活调整的能力。极化码受构造方法的约束, 其码长只能为 2 的幂次, 这限制了其在实际中的应用。主要有 3 种方法解决该问题, 即凿孔、缩短和重复。对于重复方案, 接收端在译码时将这重复发送比特的 LLR 叠加后再译码即可。下面主要介绍凿孔和缩短方法。

3.1 准均匀凿孔

凿孔将编码后码字比特中的某些比特舍弃, 达到调整码长的目的。文献[12]提出准均匀凿孔 (QUP) 方案, 在现有凿孔方案中实现复杂度低且性能优秀。

令 M 表示极化码的实际码长, 母码码长为 N , M 和 N 之间有如下关系:

$$N = 2^{\lceil \log_2 M \rceil} \quad (10),$$

其中, $\lceil \cdot \rceil$ 表示向上取整, 则凿孔位数 $N_p = N - M$ 。凿孔模式的定义如式 (11) 所示, 它是一个 N 维向量, 其中 $p_i \in \{0, 1\}$, $1 \leq i \leq N$, $p_i = 1$ 表示对应码字比特 c_i 是凿孔比特; $p_i = 0$ 表示 c_i 不是凿孔比特。

$$\mathbf{p} = (p_1 p_2 \dots p_N) \quad (11).$$

对于 QUP 方案, 其执行过程如下: 先将凿孔模式初始化为元素全 0 的向量 $(00 \dots 0)$, 再将前 N_p 个元素的值置为 1, 即

$$\mathbf{p} = (\underbrace{1 \dots 1}_{N_p} 00 \dots 00) \quad (12).$$

若编码过程中进行了比特反序变换, 则此时也需要对凿孔模式进行比特反序变换, 经变换后构造的凿孔模式将呈现凿孔位准均匀分布的特征。对于凿掉的码字比特, 由于接收端不知道其任何信息, 在译码时将其 LLR 值设为 0。

3.2 缩短

文献[13]针对极化码提出了一种缩短的方法。该方法通过直接设置信息序列中某些位为冻结位，使码字中产生已知的码字比特，可以将这些已知比特直接删除。这些删除的已知比特称为缩短比特。一种简单的做法是直接设置码字中最后 N_p 个位置为缩短位，其对应的缩短模式为：

$$p = (0 \cdots \underbrace{001 \cdots 11}_{N_p}) \quad (13).$$

相应的冻结集合中应包括这些位置，即 $\{M+1, M+2, \dots, N\} \subseteq \mathcal{A}^c$ 。与 QUP 相同，若编码过程中进行了比特反序变换，则此时也需要对缩短模式进行比特反序变换。缩短比特对接收端是已知的，在译码时将这些缩短比特的 LLR 根据实际情况设为正无穷或负无穷。

4 极化码译码算法

假设采用 BPSK 调制，调制后的序列为 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ，其中， $x_i = (-1)^{c_i} \in \{\pm 1\}$ ， $i = 1, 2, \dots, N$ 。经过 AWGN 信道传输后，在接收端接收序列为 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ ，其中， $y_i = x_i + z_i$ ， $i = 1, 2, \dots, N$ ， $z_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 。硬判决序列 $\hat{\mathbf{c}} = (\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_N)$ ，其中，若 $y_i \geq 0$ ，则 $\hat{c}_i = 0$ ，否则 $\hat{c}_i = 1$ 。LLR 序列 $L = (L_1, L_2, \dots, L_N)$ 定义为：

$$L_i = \ln \left(\frac{\Pr(y_i | c_i = 0)}{\Pr(y_i | c_i = 1)} \right) = \frac{2y_i}{\sigma^2} \quad (14),$$

其中， $\Pr(y_i | c_i = 0)$ 和 $\Pr(y_i | c_i = 1)$ 是条件概率。

4.1 SCL 译码算法

串行消除 (SC) 译码算法是极化码的基本译码算法，它根据极化码的因子图顺序译出各个信息比特。长为 N 的极化码因子图是一个有 $n = \log_2 N$ 个阶段和 N 层的规则结构。图 3 展示了 $N = 8$ 的极化码的因子图。极化码的因子图主要由加号节点和等号节点组成，因此每个节点对应的 LLR 值可分别由 f 函数和 g 函数决定。

图 4 展示了极化码因子图的一个基本单元，两个函数定义如下：

$$f(a, b) = \ln \frac{1 + e^{a+b}}{e^a + e^b} \quad (15),$$

$$g(a, b, \hat{u}_s) = (1 - 2\hat{u}_s)a + b \quad (16),$$

其中， \hat{u}_s 是该位置已译出的比特， a 和 b 表示输入该基本译码单元的 LLR 值。为了降低复杂度，公式 (15) 可以简化为：

$$f(a, b) \approx \text{sign}(a)\text{sign}(b)\min(|a|, |b|) \quad (17).$$

各节点 LLR 可计算为：

$$L_{j,i} = \begin{cases} f(L_{j-1,i}, L_{j-1,i+2^{j-1}}), & \left\lfloor \frac{i-1}{2^{j-1}} \right\rfloor \bmod 2 = 0 \\ g(L_{j-1,i-2^{j-1}}, L_{j-1,i}, \hat{u}_{j,i-2^{j-1}}), & \text{otherwise} \end{cases} \quad (18).$$

各节点比特值可计算为：

$$\hat{u}_{j,i} = \begin{cases} \hat{u}_{j+1,i} \oplus \hat{u}_{j+1,i+2^{j-1}}, & \left\lfloor \frac{i-1}{2^{j-1}} \right\rfloor \bmod 2 = 0 \\ \hat{u}_{j+1,i}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (19),$$

其中， $j = 1, 2, \dots, n$ ， $i = 1, 2, \dots, N$ 。

当计算出因子图最左边阶段的节点 LLR $L_{n,i}$ 时，可判决如下：

$$\hat{u}_{n,i} = \begin{cases} 0, & L_{n,i} \geq 0 \text{ 或为冻结比特} \\ 1, & L_{n,i} < 0 \end{cases} \quad (20).$$

经比特反序置换的逆变换后，即可得到译码结果 \hat{u}_i^N 。在执行 SC 译码算法时，初始化 $L_{0,i} = L_i$ 。

在有限码长下，SC 算法性能较差。为了进一步提升 SC 译码算法的纠错能力，文献[14-16]提出了 SCL 算法。该算法

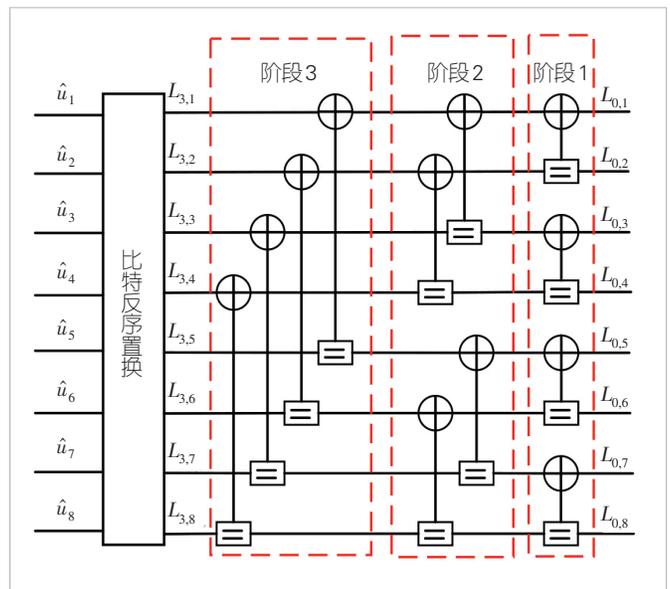


图 3 $N = 8$ 的极化码因子图

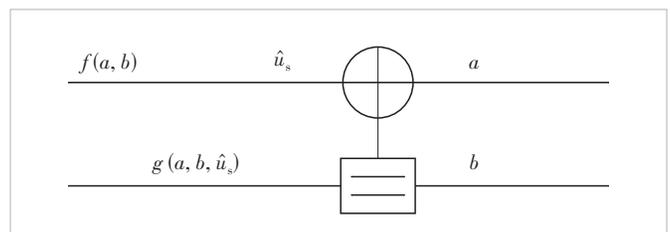


图 4 极化码基本单元因子图

在译码的同时保持多组译码结果。保持译码结果数越多，复杂度越高。为了限制候选结果的数量，需要指定最大同时保持的译码路径数 L ，也称为搜索宽度，在译码结束后选择最可能的结果输出。第 l 组可能译码结果中第 i 个信息比特的LLR值可定义为：

$$L_{n,i}[l] = \ln \frac{W_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1}[l]|0)}{W_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1}[l]|1)} \quad (21)$$

路径度量值可由公式(22)递归计算：

$$PM_i[l] = \begin{cases} PM_{i-1}[l], & 1 - 2\hat{u}_i[l] = \text{sign}(L_{n,i}[l]) \\ PM_{i-1}[l] - |L_{n,i}[l]|, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (22)$$

度量值初始化为 $PM_0[l] = 0$ 。

SCL算法在译码结束时，会根据路径度量值，将最可靠的结果输出。对于循环冗余校验(CRC)辅助的极化码，在译码结束后，选择通过CRC校验的最可靠结果输出，若 L 组结果均未通过校验，则选择最可靠的结果输出。

4.2 传统OSD算法

阶序统计译码(OSD)^[17]可以对任意短线性分组码进行译码，且可以接近最大似然(ML)译码性能。对于信息长度为 k 且最小汉明距离为 d_{\min} 的线性分组码，阶数为 $\lceil d_{\min}/4 - 1 \rceil$ 的OSD可以接近ML译码性能。令 $\alpha_i = |L_i|$ 表示可靠度，则可靠度序列为 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ 。在传统OSD中，首先对可靠度序列 α 进行降序排列，生成矩阵 G 被相应的置换为 $\bar{G} = G \prod_1$ ，其中， \prod_1 表示相应的置换。接下来，对矩阵 \bar{G} 执行高斯消元(GE)得到系统形式的矩阵 \tilde{G} 。为了确保前列是线性无关的，在GE中可能会发生置换 \prod_2 。最终，硬判决序列和可靠度序列置换为 \tilde{c} 和 $\tilde{\alpha}$ 。然后，按照汉明重量递增的顺序生成 k 长的TEP序列 $e = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ ，其中最大汉明重量为OSD的阶数(order)。对于每一个TEP e ，相应的估计码字 \tilde{c}_e 可由重编码得到。找到最可能的码字 \tilde{c}_{best} 等价于最小化 \tilde{c}_e 和 \tilde{c} 之间的加权汉明距离

(WHD)。最后，输出码字 \hat{c}_{best} 作为译码结果，即 $\hat{c}_{\text{best}} = \tilde{c}_{\text{best}} \prod_2^{-1} \prod_1^{-1}$ 。当前有许多针对OSD的优化算法，如Fast-OSD^[18]、PB-OSD^[19]和LC-OSD^[20]等，这些算法可以在保持译码性能的同时降低计算复杂度。

5 低复杂度SCL-OSD译码算法

当前极化码性能最优的译码算法是SCL。当列表较小时，SCL算法性能较差，但是复杂度较低，当列表数较大时性能较好但复杂度会更高。然而，列表大小 L 和性能增益并非呈线性比例。随着列表数的增大，SCL性能增益逐渐降低，但是复杂度和列表大小是成正比的。图5展示了5G极化码在不同列表大小下的误块率(BLER)性能和复杂度，其中， $N = 128$ ， $k = 64$ ，CRC校验比特数 $r = 11$ 。复杂度的定义在第5.3节有详细描述。可以看出，随着列表 L 的增大，BLER性能逐渐提升，但是提升的幅度逐渐减小，复杂度随着列表大小线性增加。

因此，为了平衡SCL性能和复杂度之间的关系，本文提出了一种SCL和OSD级联的方案。在SCL-OSD方案中最重要的一问题是SCL译码器如何输出软信息，即后验LLR，该软信息将作为OSD的先验信息输入到OSD中进行译码。

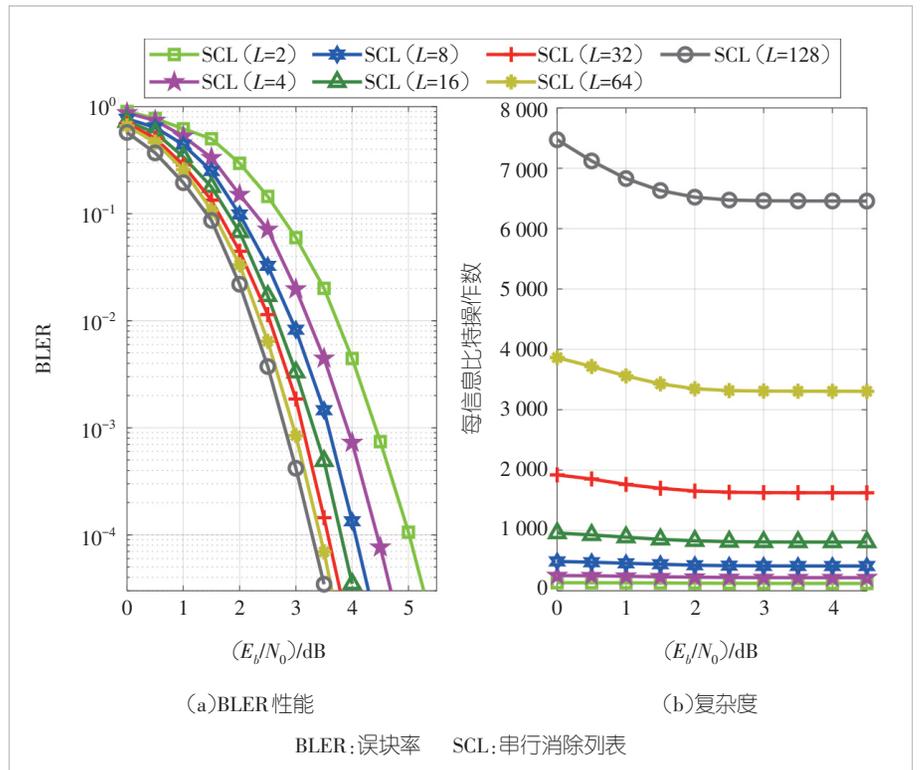


图5 5G极化码 $N = 128$ 、 $k = 64$ 、 $r = 11$ 在SCL不同列表下的BLER性能和复杂度

5.1 SCL后验LLR

在SCL和OSD级联方案中，OSD输入的先验信息应当从SCL处获得，这样可以充分利用SCL译码结果。传统SCL译码器是硬输出的，即只有比特信息，没有软信息。基于文献[21]，下面本文给出从SCL输出后验LLR的方法。

假设译码结束后，获得 L 组译码结果 $u_1^N[l]$, $l = 1, 2, \dots, L$ 。对于每一条候选路径 l ，相应的估计码字由 $u_1^N[l]$ 重编码获得，可计算如下：

$$c_1^N[l] = u_1^N[l]G_N \quad (23)$$

根据上述路径度量计算可知，路径度量值越大，表明该条路径的译码结果越可靠。归一化各条路径正确的概率为：

$$p_l = \frac{\exp(PM[l])}{\sum_{i=1}^L \exp(PM[i])} \quad (24)$$

第 i 个码字比特的概率可计算为：

$$p(\hat{c}_i) = \sum_{\substack{1 \leq l \leq L \\ \hat{c}_i = c_{i,l}}} p_l \quad (25)$$

则SCL译码器的外信息 $L^e = (L_1^e, L_2^e, \dots, L_N^e)$ 可计算为：

$$L_i^e = \begin{cases} 2/\sigma^2, & p(\hat{c}_i = 1) = 0 \\ \ln\left(\frac{p(\hat{c}_i = 0)}{p(\hat{c}_i = 1)}\right) & p(\hat{c}_i = 1) \neq 0 \& p(\hat{c}_i = 0) \neq 0 \\ -2/\sigma^2 & p(\hat{c}_i = 0) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

因此，SCL输出的后验LLR $L^p = (L_1^p, L_2^p, \dots, L_N^p)$ 为：

$$L_i^p = L_i^e + L_i \quad (27)$$

在SCL-OSD中，只有SCL译码失败才需要启动OSD译码，因此只需要在SCL译码失败时计算后验LLR即可。

5.2 SCL-OSD译码过程

SCL-OSD译码流程如图6所示。首先执行SCL译码，当SCL译码成功，即存在路径结果通过CRC校验时，则直接输出该译码结果；若所有路径的结果都没有通过CRC校验，则执行传统OSD译码，然后输出相应译码结果。

值得注意的是，在SCL-OSD方案中，输入到OSD的可靠度序列由SCL输出的后验LLR构造，而WHD仍由信道接收LLR计算。

5.3 复杂度分析

本节将通过比较每比特信息的平均操作次数来分析译码复杂度。总操作次数定义为实数加法、二进制加法和比较的

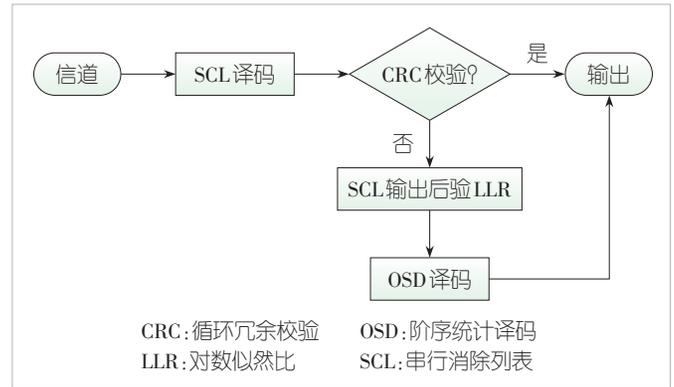


图6 SCL-OSD译码框图

总数^[22]。首先分析SCL算法的复杂度：

1) SCL在译码过程中当路径分裂数大于 $2L$ 时需要进行排序操作，采用快排序，共需要 $2L \log_2(2L)(k - \log_2 L)$ 次比较，路径度量值的计算需要 N 次比较和最多 NL 次实数加。

2) 计算每个节点LLR时，每个加号节点计算公式(17)需要5个比较，每个等号节点计算公式(16)需要1个比较和1个实数加法。总共有 $N/2 \log_2 N$ 个加号节点和 $N/2 \log_2 N$ 个等号节点，因此最多需要 $3LN \log_2 N$ 次比较和 $LN/2 \log_2 N$ 次实数加法。

3) 计算每个节点比特值时，加号节点执行二进制加法来返回比特信息，最多有 $LN/2 \log_2 N$ 次二进制加法。

4) 最后对每条路径的译码结果进行CRC校验，需要对每条路径的译码结果计算 $\hat{u}_A[l]H_{\text{crc}}$ (H_{crc} 是相应的CRC校验矩阵)并判断是否通过校验，需要 $(k+r)r$ 次二进制加法和 r 次比较。因此，最多需要 $L(k+r)r$ 次二进制加和 Lr 次比较。

下面总结OSD中的操作数：

1) 得到硬判决结果 \hat{c} 需要 N 次比较。获得可靠度序列 α 需要 N 次比较。

2) 用快排序方法对 α 排序，需要 $N \log_2 N$ 次比较。GE需要 $N(\min(k, N-k))^2$ 次二进制加法。

3) 下面的步骤重复 $\sum_{i=0}^{\text{order}} \binom{k}{i}$ 次。计算 \tilde{c}_e 需要 $k(N-k+1)$ 次二进制加法。计算WHD并判断是否需要更新需要 $N-1$ 次实数加法和1次比较。

上述算法的总的操作数如表1所示。

5.4 仿真结果

本节通过仿真结果来评估所提出的SCL-OSD算法的译码性能和复杂度。为了便于对比，本节对不同列表大小的SCL算法和不同译码阶数的OSD算法进行了仿真。所有仿真均假设BPSK调制和AWGN信道。

图7展示了5G极化码 $M = 128$ 、 $k = 64$ 、 $r = 11$ 的BLER

表1 计算复杂度

算法操作	SCL	OSD
实数加法	$LN(1/2 \log_2 N + 1)$	$\sum_{i=0}^{\text{order}} \binom{k}{i} (N-1)$
二进制加法	$LN/2 \log_2 N + L(k+r)r$	$N(\min(k, N-k))^2 + \sum_{i=0}^{\text{order}} \binom{k}{i} k(N-k+1)$
比较	$2L \log_2(2L)(k - \log_2 L) + N + 3LN \log_2 N + Lr$	$2N + N \log_2 N + \sum_{i=0}^{\text{order}} \binom{k}{i}$
总操作数	$2L \log_2(2L)(k - \log_2 L) + N(L+1) + 4LN \log_2 N + L(k+r+1)r$	$N((\min(k, N-k))^2 + \log_2 N + 2) + \sum_{i=0}^{\text{order}} \binom{k}{i} (N + k(N-k+1))$

SCL: 串行消除列表 OSD: 阶序统计译码

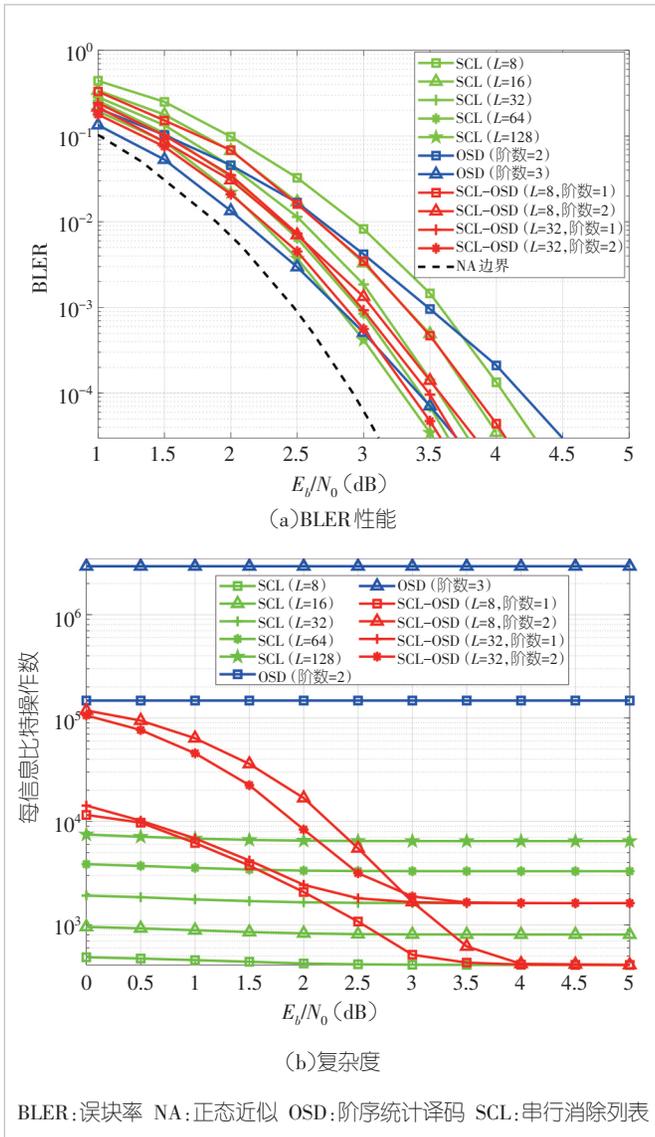


图7 5G极化码 $M = 128, k = 64, r = 11$ 的BLER性能和复杂度

性能和复杂度。由图7可知, $L = 8$ 、阶数 = 1 的 SCL-OSD 性能和 $L = 16$ 的 SCL 性能相当; $L = 8$ 、阶数 = 2 的 SCL-OSD 性能和 $L = 32$ 的 SCL 性能相当; $L = 32$ 、阶数 = 1 的 SCL-OSD 性能和 $L = 64$ 的 SCL 性能相当; $L = 32$ 、阶数 = 2 的 SCL-OSD 性能优于 $L = 64$ 的 SCL 性能, 比 $L = 128$ 的 SCL 性能略差。在复杂度方面, 由图7可知, 随着信噪比的增大, SCL-OSD 的复杂度会趋近于单独 SCL 译码的复杂度。

此外, 对 5G 极化码 $M = 96, k = 64, r = 11$ 也进行了相同的仿真, 母码码长 $N = 128$ 。由图8可知, $L = 8$ 、阶数 = 1 的 SCL-OSD 性能和 $L = 32$ 的 SCL 性能相当; $L = 16$ 、阶数 = 1 的 SCL-OSD 性能和 $L = 64$ 的 SCL 性能相当; $L = 32$ 、阶数 = 1 的 SCL-OSD 性能和 $L = 128$ 的 SCL 性能相当。由图8可知, 随着信噪比的增大, SCL-OSD 的复杂度会

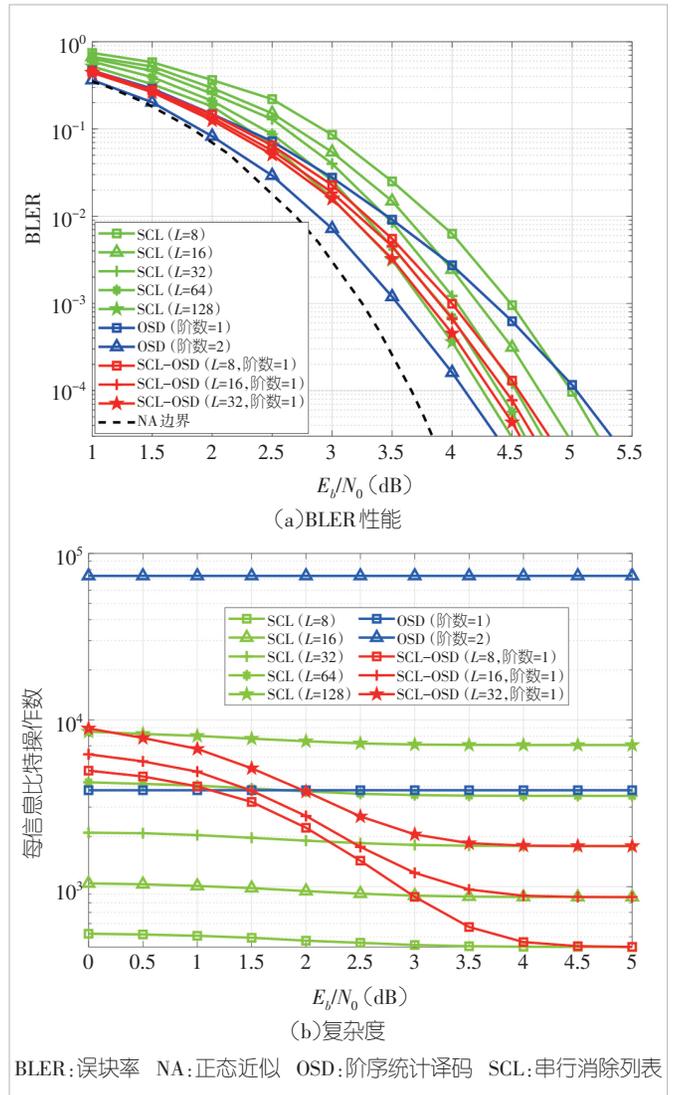


图8 5G极化码 $M = 96, k = 64, r = 11$ 的BLER性能和复杂度

趋近于单独 SCL 译码的复杂度。

综上, SCL-OSD 相比 SCL 可以在取得相似译码性能的同时具有更低的复杂度。

6 结束语

本文以面向卫星通信的信道编码为目标, 概述了极化码的基本原理、构造和编码、速率兼容方案等。在译码算法方面, 主要描述了极化码当前性能最优的译码算法 SCL 和一种通用译码算法 OSD。然后, 分析了 SCL 算法存在的问题, 即随着列表的增大, 性能增益逐渐减小, 而复杂度随列表大小成正比增加。针对该问题, 本文为短极化码设计了一种 SCL 和 OSD 级联的方案。当 SCL 译码失败时, 译码器输出后验 LLR 并启动 OSD 译码。仿真结果表明, 所提算法相比 SCL 算法复杂度更低且译码性能相似。

参考文献

- [1] 3GPP TR 38.821 V16.1.0 Solutions for NR to support non-terrestrial networks (NTN) [S]. 2021
- [2] Azari M M, Solanki S, Chatzinotas S, et al. Evolution of non-terrestrial networks from 5G to 6G: a survey [J]. IEEE communications surveys & tutorials, 2022, 24(4): 2633–2672. DOI: 10.1109/COMST.2022.3199901
- [3] Shannon C E. A mathematical theory of communication [J]. Bell system technical journal, 1948, 27(3): 379–423. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x
- [4] Arikan E. Channel polarization: a method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels [J]. IEEE transactions on information theory, 2009, 55(7): 3051–3073. DOI: 10.1109/TIT.2009.2021379
- [5] 3GPP. Multiplexing and channel coding: TS 38.212 V15.1.0 [S]. 2018
- [6] Mori R, Tanaka T. Performance of polar codes with the construction using density evolution [J]. IEEE communications letters, 2009, 13(7): 519–521. DOI: 10.1109/LCOMM.2009.090428
- [7] Trifonov P. Efficient design and decoding of polar codes [J]. IEEE transactions on communications, 2012, 60(11): 3221–3227. DOI: 10.1109/TCOMM.2012.081512.110872
- [8] Wu D L, Li Y, Sun Y. Construction and block error rate analysis of polar codes over AWGN channel based on Gaussian approximation [J]. IEEE communications letters, 2014, 18(7): 1099–1102. DOI: 10.1109/LCOMM.2014.2325811
- [9] He G N, Belfiore J C, Land I, et al. Beta-expansion: a theoretical framework for fast and recursive construction of polar codes [C]// Proceedings of GLOBECOM 2017 – 2017 IEEE Global Communications Conference. IEEE, 2017: 1–6. DOI: 10.1109/GLOCOM.2017.8254146
- [10] Zhou Y, Li R, Zhang H Z, et al. Polarization weight family methods for polar code construction [C]// Proceedings of IEEE 87th Vehicular Technology Conference (VTC Spring). IEEE, 2018: 1–5. DOI: 10.1109/VTCSpring.2018.8417498
- [11] Arikan E. Systematic polar coding [J]. IEEE communications letters, 2011, 15(8): 860–862. DOI: 10.1109/LCOMM.2011.061611.110862
- [12] Niu K, Chen K, Lin J R. Beyond turbo codes: Rate-compatible punctured polar codes [C]// Proceedings of IEEE International Conference on Communications (ICC). IEEE, 2013: 3423–3427.

- DOI: 10.1109/ICC.2013.6655078
- [13] Wang R X, Liu R K. A novel puncturing scheme for polar codes [J]. IEEE communications letters, 2014, 18(12): 2081–2084. DOI: 10.1109/LCOMM.2014.2364845
 - [14] Chen K, Niu K, Lin J R. List successive cancellation decoding of polar codes [J]. Electronics letters, 2012, 48(9): 500–501. DOI: 10.1049/el.2011.3334
 - [15] Tal I, Vardy A. List decoding of polar codes [J]. IEEE transactions on information theory, 2015, 61(5): 2213–2226. DOI: 10.1109/TIT.2015.2410251
 - [16] Niu K, Chen K. CRC-aided decoding of polar codes [J]. IEEE communications letters, 2012, 16(10): 1668–1671. DOI: 10.1109/LCOMM.2012.090312.121501
 - [17] Fossorier M P C, Lin S. Soft-decision decoding of linear block codes based on ordered statistics [J]. IEEE transactions on information theory, 1995, 41(5): 1379–1396. DOI: 10.1109/18.412683
 - [18] Van W J, Alloum A, Boutros J J, et al. On short-length error-correcting codes for 5G-NR [J]. Ad hoc networks, 2018, 79: 53–62. DOI: 10.1016/j.adhoc.2018.06.005
 - [19] Yue C T, Shirvanimoghaddam M, Park G, et al. Probability-based ordered-statistics decoding for short block codes [J]. IEEE communications letters, 2021, 25(6): 1791–1795. DOI: 10.1109/LCOMM.2021.3058978
 - [20] Liang J F, Wang Y W, Cai S H, et al. A low-complexity ordered statistic decoding of short block codes [J]. IEEE communications letters, 2023, 27(2): 400–403. DOI: 10.1109/LCOMM.2022.3222819
 - [21] Wu X, Wang Y F, Li C F. Low-complexity CRC aided joint iterative detection and SCL decoding receiver of polar coded SCMA system [J]. IEEE access, 2020, 8: 220108–220120. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3043017
 - [22] Yue C T, Miloslavskaya V, Shirvanimoghaddam M, et al. Efficient decoders for short block length codes in 6G URLLC [J]. IEEE communications magazine, 2023, 61(4): 84–90. DOI: 10.1109/MCOM.001.2200275

作者简介



李春杰, 中山大学在读博士研究生; 主要研究方向为信道编码、非正交多址接入和新型波形调制。



马啸, 中山大学教授, 博士生导师; 主要研究方向为信息与编码理论、编码调制技术、无线通信和光通信等。